解析力学 課題 (2020/4/27)

極座標 (r, φ, θ) におけるラグランジ方程式の具体的な式を導出せよ。
r, φ, θ は互いに依存しないこととする。

$x = r \sin\theta \cos\varphi,\ y = r \sin\theta \cos\varphi,\ z = r \cos\theta$

1. 極座標における運動エネルギーは次の式であらわされる。右辺の各項目について説明せよ。
   $$T = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + (r \sin\theta)^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right]$$
2. ポテンシャル $V(r, \varphi, \theta)$ におけるラグランジアン L を (r, φ, θ) を用いて表せ
3. 一般化運動量を導出せよ
4. ラグランジ方程式から一般化座標 (r, φ, θ) に対応する運動方程式を導け

PowerPoint 等 のファイルで提出
期限: 今日の17:00までに
できたところまでで可

解析力学

参考文献: 高橋康、量子力学を学ぶための解析力学入門 増補第2版、講談社 (2000)

- 物質系の運動はNewtonの運動方程式で時間変化が決まる。
  座標 q_i と運動量 p_i は時間の関数であり、独立には変われない
- 最小作用の原理
  座標 q_i と運動量 p_i が独立に変化させられる状態を考え、そのうちで作用が最小となる運動のみが実現されるとする (**Hamiltonの原理**)
  => $q_i,\ p_i$ を独立変数として扱う
- 作用積分: ある関数 (ラグランジアンと呼ぶ) $L(q_i,\ p_i)$ の時間積分

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i,\ p_i)dt$$

- **作用を最小化するためには、$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ を満たす必要がある。**
- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ は任意の**一般化座標 q_i に対して不変**
- **$L(q_i,\ p_i, t)$ を適当に選べば 運動方程式が得られる**。
- $L(q_i,\ p_i, t) = T - V$ とすると、Newtonの運動方程式が得られる。
- $V(q_i,\ p_i, t)$ としてもよい (一般化ポテンシャル)。
  (運動方程式が得られるような適当な**$L(q_i,\ p_i)$が選ばれるので)**

極座標での運動エネルギー

極座標での運動エネルギー

$$T = \frac{1}{2}m\left[\underline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} \quad + \underline{(r\sin\theta)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} \quad + \underline{r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\right]$$

動径方向の
運動エネルギー

φ面 (x-y面) 内の回転の
運動エネルギー。
$r\sin\theta$は動径 r の φ面 への
投影 (面内での運動半径)。
$\dot{\varphi}$は面内の角速度。

θ面 内の動径 r での回転の
運動エネルギー。
$\dot{\theta}$は面内の角速度。

ラグランジアン:

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + (r\sin\theta)^2\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] - V(r,\varphi,\theta)$$

一般化運動量: $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ (基本的な定義の)運動量

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad\qquad m\dot{r}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(r\sin\theta)^2\dot{\varphi} \qquad\qquad m(r\sin\theta)\dot{\varphi}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \qquad\qquad mr\dot{\theta}$$

極座標での運動方程式

Euler-Lagrange方程式 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \boldsymbol{\frac{dp_i}{dt}} = \boldsymbol{\frac{\partial L}{\partial q_i}}$

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + (r\sin\theta)^2\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] - V(r,\varphi,\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r} \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = m\left(r(\sin\theta)^2\dot{\varphi}^2 + r\dot{\theta}^2\right) - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m(r\sin\theta)^2\dot{\varphi}\right)$$

$$= m\left[2r\dot{r}(\sin\theta)^2\dot{\varphi} + 2r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + (r\sin\theta)^2\ddot{\varphi}\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = m\left[2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m\left[r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\right] - \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

運動方程式

$$m\ddot{r} = m\left(r(\sin\theta)^2\dot{\varphi}^2 + r\dot{\theta}^2\right) - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$m(r\sin\theta)^2\ddot{\varphi} = -m\left[2r\dot{r}(\sin\theta)^2\dot{\varphi} + 2r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\right] - \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$mr^2\ddot{\theta} = m\left[r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - 2r\dot{r}\dot{\theta}\right] - \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

極座標での運動方程式

φを含む面を x-y 面、それに垂直な面を z 面とする。

$$r_{x-y} = r\sin\theta \qquad r_z = r\cos\theta$$

$$v_\varphi = r\sin\theta\cdot\dot{\varphi} \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \qquad v_r = \dot{r}$$

運動方程式

$$m\ddot{r} = m\left(r(\sin\theta)^2\dot{\varphi}^2 + r\dot{\theta}^2\right) - \frac{\partial V}{\partial r} = \underbrace{m\left(r_{x-y}\dot{\varphi}^2(\sin\theta) + r\dot{\theta}^2\right)}_{\text{遠心力}} - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$m(r\sin\theta)^2\ddot{\varphi} = -m\left[2r\dot{r}(\sin\theta)^2\dot{\varphi} + 2r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\right] - \frac{\partial V}{\partial\varphi}$$

$$= -m\left[\underbrace{2v_r v_\varphi\sin\theta + 2v_\varphi v_\theta\cos\theta}_{\text{コリオリの力}}\right] - \frac{\partial V}{\partial\varphi}$$

$$mr^2\ddot{\theta} = m\left[r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - 2r\dot{r}\dot{\theta}\right] - \frac{\partial V}{\partial\theta}$$

$$= m\left[\underbrace{v_\varphi r\dot{\varphi}\cos\theta - 2v_r v_\theta}_{\text{コリオリの力}}\right] - \frac{\partial V}{\partial\theta}$$

参考: 二次元運動

$$\mathrm{m}\ddot{\boldsymbol{r}} = \underbrace{-2m\dot{\theta}\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{v}}}_{\text{コリオリの力}} + \underbrace{m\boldsymbol{r}\dot{\theta}^2}_{\text{遠心力}} - \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}$$

($\boldsymbol{n}$: 回転軸方向の単位ベクトル)